

# DALLA GEOMETRIA INTUITIVA ALLA GEOMETRIA RAZIONALE



*ROSA IADEROSA*

# ARTICOLAZIONE DELL'INTERVENTO



- La geometria e il mondo reale
- Lo spazio
- I concetti geometrici
- La geometria intuitiva nel primo ciclo di istruzione
- Il passaggio alla geometria razionale:  
continuità/frattura

# QUALCHE PREMESSA TEORICA



## ***Geometria e mondo fisico:***

Questo rapporto è molto stretto e certamente costituisce uno degli elementi salienti che caratterizzano lo studio della geometria.

“Coloro che trattano la geometria, il calcolo e studi simili, postulano il pari e il dispari, le figure, tre tipi di angoli e altre cose simili, secondo il campo specifico dei loro studi; [...]anche se usano e ragionano su figure visibili, non pensano ad esse, piuttosto pensano a quelle figure delle quali esse sono copie: discutono del quadrato in sé, della diagonale in sé, ma non discutono della figura che è stata tracciata e modellata, figure che fanno ombra o che si riflettono nell’acqua vengono usate come immagini da guardare nella propria mente”

(Platone, Repubblica VI, 510 c, d)

# Gli oggetti e i concetti geometrici



Già Platone quindi rilevava l'*ambiguità* del pensiero geometrico:

gli oggetti della geometria non sono gli  
oggetti reali, anche se nascono dall'osservazione del  
mondo fisico in cui  
siamo immersi

# La teoria e il quadro assiomatico



Nello sviluppo culturale attraverso i secoli si è assistito a questo passaggio:

la geometria da modello tanto vero quanto attendibile dello spazio fisico al quale si riferiva, a teoria sempre più affrancata da ogni riferimento al reale.

# Il legame con la realtà e l'esperienza



- Una lunga tradizione ci tramanda una geometria come scienza saldamente radicata nell'esperienza, che da tale legame trae il senso di certezza e la garanzia della propria coerenza.
- Da un punto di vista teorico il rapporto tra geometria e realtà è stato risolto, dal punto di vista didattico però esso resta ancora un problema centrale e lontano dall'avere risposte soddisfacenti.

# Geometria e ragionamento spaziale



Per ***ragionamento spaziale*** ***si*** intende l'insieme dei processi cognitivi attraverso i quali vengono costruite ed elaborate rappresentazioni /concettualizzazioni di oggetti spaziali, di relazioni e di trasformazioni tra essi. Chiaramente, geometria e ragionamento spaziale sono legati strettamente.

# Spatial cognition



Il legame stretto tra geometria e conoscenze spaziali (***spatial cognition***) porta a confonderle, e tale confusione porta a sottovalutare certe differenze che invece sono fondamentali da un punto di vista didattico.

Anche se si è concordi sul fatto che geometria e ragionamento spaziale siano legati, in generale c'è la tendenza a non distinguere questi due campi della conoscenza, e di solito l'acquisizione di concetti geometrici viene assimilata alla concettualizzazione dello spazio fisico.

(Mariotti, 2003)



# La teoria di Van Hiele



Van Hiele ha proposto un ***modello evolutivo dell'apprendimento della geometria*** nel quale i due punti di vista vengono combinati. Da un lato la geometria come concettualizzazione dello spazio, dall'altro la geometria come teoria formale, e le differenze sono proiettate su una dimensione evolutiva. I diversi livelli progrediscono in termini di una concettualizzazione che si confonde con una formalizzazione via via più rigorosa e strutturata: ***oggetti, relazioni e sistemi di relazioni***. Il livello ultimo dello sviluppo consisterà appunto nella capacità di muoversi all'interno di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero all'interno di una teoria assiomatica.

# *Come utilizzare tutto ciò dal punto di vista dell'insegnamento?*

Si può parlare di:

***geometria naturale***: intimamente legata alla realtà e alla percezione immediata di essa (la geometria ***intuitiva***). Verifiche sperimentali e spiegazioni non sono escluse, ma si riferiscono direttamente agli oggetti materiali attraverso i sensi (percezione), eventualmente potenziati dagli strumenti, in particolare di misura. Si ha un continuo scambio tra realtà e modello geometrico, il legame stretto con la realtà garantisce la verità delle affermazioni.

# La geometria *deduttiva naturale*



La validazione degli enunciati si basa su schemi ipotetico deduttivi, come in una teoria assiomatica. Gli assiomi sono il più possibile vicini all'intuizione che si è soliti avere dello spazio che ci circonda e il sistema assiomatico non è completo, in quanto non sono esplicitate ad esempio le regole di deduzione. In ogni caso, si afferma la necessità delle deduzioni per poter affermare la “verità” di nuove affermazioni

# La geometria *assiomatica*



Viene tagliato il legame tra la realtà e gli assiomi, che non devono necessariamente basarsi sull'esperienza sensibile. Il sistema di assiomi è completo e indipendente dalle possibili applicazioni del mondo reale: esso si basa sulla sua coerenza, cioè sulla mancanza di contraddizioni.

## Nella scuola...



Queste tre tipologie di geometria sono presenti nella scuola italiana, tuttavia manca la consapevolezza della loro distinzione, della necessità di mediare il passaggio dall'una all'altra, e soprattutto spesso docenti e studenti non si rendono conto di confondere questi piani. Gli insuccessi vengono attribuiti alla mancanza di “intuizione geometrica”, mentre di fatto sono spesso dovuti alla confusione tra questi modelli teorici di riferimento.

# Un utile quadro di riferimento teorico



## ***La teoria dei concetti figurali di Fishbein:***

- *Il ragionamento geometrico si basa su particolari oggetti mentali, le figure geometriche.*
- *Le figure non sono né pure immagini, né puri concetti.*
- *Per la geometria la realtà viene sostituita da rappresentazioni mentali*

# *I concetti figurali*



Oggetti e proprietà possono essere considerati come pure costruzioni mentali e possono essere studiati anche senza fare ricorso all'esperienza concreta.

Però il legame con la realtà è mantenuto dal fatto che i processi di pensiero mantengono una proprietà della realtà rappresentabile in maniera figurale: ***lo spazio***

# *I concetti figurali*



Un concetto figurale è un'entità mentale che è controllata da una concetto, ma che preserva la sua spazialità (Fishbein, 1993)



# *Il disegno e la figura*



Da un punto di vista evolutivo e di significati si tratta di una distinzione importante:

“...Il disegno è quello tracciato concretamente su un foglio di carta

la figura è l’oggetto matematico del quale il disegno non è che una rappresentazione.

La figura è un elemento del mondo matematico e non un oggetto sensibile...”

(Arsac, 1989)

## Ancora sulle figure



...Il termine *figura geometrica* rinvia a fissare una relazione tra oggetto geometrico e sue rappresentazioni possibili....

...I rapporti tra un disegno e il suo referente, così come sono costruiti dal soggetto, lettore o produttore del disegno, costituiscono per il soggetto stesso il significato della figura geometrica associata e figura...

(Capponi & Laborde, 1994)

Di qui l'importanza delle costruzioni geometriche

# La *figura*



Ad essa viene attribuito un significato, ma anche un nome, dunque tra *segno* e *oggetto* si stabilisce una relazione attraverso il *nome*, la definizione.

(sono presenti nella figura la relazione di *significazione* e di *rappresentazione*)

# Che cosa fare quindi a scuola?



- Nella scuola primaria la geometria è quella naturale
- Il rapporto con lo spazio si evolve attraverso la crescita del bambino:  
dal suo *microspazio* (alla sua altezza), al *mesospazio* (al più una stanza) e poi allo spazio fisico in cui è immerso (*macrospazio*)
- Rappresentazioni e linguaggio si adeguano a queste fasi evolutive

# La scuola secondaria di primo grado



Nella scuola media la geometria è intuitiva, ma come si è visto deve cominciare ad evolversi verso un quadro teorico più definito.

Si comincia quindi a “ragionare” su modelli, statici e dinamici; si costruiscono enunciati e definizioni da verificare e sperimentare; si comincia a generalizzare fatti, oltre che a verificarli...

# Il passaggio alla scuola secondaria di secondo grado



Nel passaggio al biennio, scolasticamente si impone l'introduzione degli assiomi e l'avvio alla dimostrazione.

Se non mediato, questo passaggio pone seri problemi all'apprendimento:

- la motivazione
- il cambiamento di statuto epistemologico

# Attività preparatorie alla geometria razionale nella scuola media



- Fornire giustificazioni di proprietà in forma breve, schematica, ed espresse simbolicamente – richiederne l'interpretazione e l'esplicitazione verbale
- Fornire argomentazioni in cui manchi il riferimento alla proprietà che “giustifica” l'affermazione ( es. “è vero che.....perché.....”) e riconoscere il riconoscimento del nesso “causale”
- Assegnare verbalmente costruzioni geometriche e richiederne la realizzazione nel disegno
- Formulare proprietà in forma di implicazione (“se.....allora.....”) (*attività sintattica*)
- Verificare se vale una certa implicazione e/o la sua inversa (*attività semantica*)
- Distinzione tra proprietà **vere** - vere solo in alcuni casi e quindi **false**
- Utilizzare la figura, analizzarla, trasformarla, rianalizzarla, al fine di ricercare proprietà e/o verificarle
- Analizzare o completare o riordinare sequenze deduttive, o parti più brevi e limitate di queste

# Spunti per un lavoro di approfondimento



A partire dal seguente problema:

trovare alcune attività geometriche che esemplifichino i punti:

- **capacità di argomentare** esplicitando in forma chiara e corretta semplici “ragionamenti”;
- **capacità di analizzare la possibilità di generalizzare proprietà**, eventualmente negarne la possibilità attraverso l’uso del controesempio;
- **capacità di osservare ed analizzare una figura con un atteggiamento euristico**, alla ricerca di proprietà da evidenziare e verificare.



# L'EREDITA'

Due fratelli ereditano un terreno di forma rettangolare. Per dividerlo in due parti della medesima estensione, un conoscente suggerisce loro di piantare un palo in un punto qualsiasi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti infissi nei quattro vertici del terreno rettangolare.

Uno dei fratelli prenderà la parte colorata in grigio nel disegno, l'altro la rimanente.

**Le due parti hanno davvero la stessa estensione?**

**Giustificate il vostro ragionamento.**

