

# DALLA GEOMETRIA INTUITIVA ALLA GEOMETRIA RAZIONALE

*ROSA IADEROSA*

Rosa Iaderosa - dalla geometria intuitiva a  
quella razionale



# ARTICOLAZIONE DELL'INTERVENTO

- ◉ La geometria e il mondo reale
- ◉ Lo spazio
- ◉ I concetti geometrici
- ◉ La geometria intuitiva nel primo ciclo di istruzione
- ◉ Il passaggio alla geometria razionale: continuità/frattura



# QUALCHE PREMESSA TEORICA

## ***Geometria e mondo fisico:***

Questo rapporto è molto stretto e certamente costituisce uno degli elementi salienti che caratterizzano lo studio della geometria.

“Coloro che trattano la geometria, il calcolo e studi simili, postulano il pari e il dispari, le figure, tre tipi di angoli e altre cose simili, secondo il campo specifico dei loro studi; [...]anche se usano e ragionano su figure visibili, non pensano ad esse, piuttosto pensano a quelle figure delle quali esse sono copie: discutono del quadrato in sé, della diagonale in sé, ma non discutono della figura che è stata tracciata e modellata, figure che fanno ombra o che si riflettono nell’acqua vengono usate come immagini da guardare nella propria mente”

(Platone, Repubblica VI, 510 c, d)



# GLI OGGETTI E I CONCETTI GEOMETRICI

Già Platone quindi rilevava l'*ambiguità* del pensiero geometrico:

gli oggetti della geometria non sono gli oggetti reali, anche se nascono dall'osservazione del mondo fisico in cui siamo immersi



# LA TEORIA E IL QUADRO ASSIOMATICO

Nello sviluppo culturale attraverso i secoli si è assistito a questo passaggio:

la geometria da modello tanto vero quanto attendibile dello spazio fisico al quale si riferiva, a teoria sempre più affrancata da ogni riferimento al reale.



# IL LEGAME CON LA REALTÀ E L'ESPERIENZA

- ◉ Una lunga tradizione ci tramanda una geometria come scienza saldamente radicata nell'esperienza, che da tale legame trae il senso di certezza e la garanzia della propria coerenza.
- ◉ Da un punto di vista teorico il rapporto tra geometria e realtà è stato risolto, dal punto di vista didattico però esso resta ancora un problema centrale e lontano dall'avere risposte soddisfacenti.



# GEOMETRIA E RAGIONAMENTO SPAZIALE

Per *ragionamento spaziale* si intende l'insieme dei processi cognitivi attraverso i quali vengono costruite ed elaborate rappresentazioni /concettualizzazioni di oggetti spaziali, di relazioni e di trasformazioni tra essi. Chiaramente, geometria e ragionamento spaziale sono legati strettamente.



# SPATIAL COGNITION

Il legame stretto tra geometria e conoscenze spaziali

(*spatial cognition*) porta a confonderle, e tale confusione porta a sottovalutare certe differenze che invece sono fondamentali da un punto di vista didattico.

Anche se si è concordi sul fatto che geometria e ragionamento spaziale siano legati, in generale c'è la tendenza a non distinguere questi due campi della conoscenza, e di solito l'acquisizione di concetti geometrici viene assimilata alla concettualizzazione dello spazio fisico.

(Mariotti, 2003)



# LA TEORIA DI VAN HIELE

Van Hiele ha proposto un ***modello evolutivo dell'apprendimento della geometria*** nel quale i due punti di vista vengono combinati . Da un lato la geometria come concettualizzazione dello spazio, dall'altro la geometria come teoria formale, e le differenze sono proiettate su una dimensione evolutiva. I diversi livelli progrediscono in termini di una concettualizzazione che si confonde con una formalizzazione via via più rigorosa e strutturata: ***oggetti, relazioni e sistemi di relazioni***. Il livello ultimo dello sviluppo consisterà appunto nella capacità di muoversi all'interno di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero all'interno di una teoria assiomatica.



# COME UTILIZZARE TUTTO CIÒ DAL PUNTO DI VISTA DELL'INSEGNAMENTO?

Si può parlare di:

***geometria naturale***: intimamente legata alla realtà e alla percezione immediata di essa (la geometria ***intuitiva***). Verifiche sperimentali e spiegazioni non sono escluse, ma si riferiscono direttamente agli oggetti materiali attraverso i sensi (percezione), eventualmente potenziati dagli strumenti, in particolare di misura. Si ha un continuo scambio tra realtà e modello geometrico, il legame stretto con la realtà garantisce la verità delle affermazioni.



# LA GEOMETRIA DEDUTTIVA NATURALE

La validazione degli enunciati si basa su schemi ipotetico deduttivi, come in una teoria assiomatica. Gli assiomi sono il più possibile vicini all'intuizione che si è soliti avere dello spazio che ci circonda e il sistema assiomatico non è completo, in quanto non sono esplicitate ad esempio le regole di deduzione. In ogni caso, si afferma la necessità delle deduzioni per poter affermare la “verità” di nuove affermazioni



# LA GEOMETRIA ASSIOMATICA

Viene tagliato il legame tra la realtà e gli assiomi, che non devono necessariamente basarsi sull'esperienza sensibile. Il sistema di assiomi è completo e indipendente dalle possibili applicazioni del mondo reale: esso si basa sulla sua coerenza, cioè sulla mancanza di contraddizioni.



## NELLA SCUOLA...

Queste tre tipologie di geometria sono presenti nella scuola italiana, tuttavia manca la consapevolezza della loro distinzione, della necessità di mediare il passaggio dall'una all'altra, e soprattutto spesso docenti e studenti non si rendono conto di confondere questi piani. Gli insuccessi vengono attribuiti alla mancanza di “intuizione geometrica”, mentre di fatto sono spesso dovuti alla confusione tra questi modelli teorici di riferimento.



# UN UTILE QUADRO DI RIFERIMENTO TEORICO

## ***La teoria dei concetti figurali di Fishbein:***

- ◉ *Il ragionamento geometrico si basa su particolari oggetti mentali, le figure geometriche.*
- ◉ *Le figure non sono né pure immagini, né puri concetti.*
- ◉ *Per la geometria la realtà viene sostituita da rappresentazioni mentali*



# *I CONCETTI FIGURALI*

Oggetti e proprietà possono essere considerati come pure costruzioni mentali e possono essere studiati anche senza fare ricorso all'esperienza concreta.

Però il legame con la realtà è mantenuto dal fatto che i processi di pensiero mantengono una proprietà della realtà rappresentabile in maniera figurale: *lo spazio*



# *I CONCETTI FIGURALI*

Un concetto figurale è un'entità mentale che è controllata da una concetto, ma che preserva la sua spazialità (Fishbein, 1993)



# IL DISEGNO E LA FIGURA

Da un punto di vista evolutivo e di significati si tratta di una distinzione importante:

“...Il disegno è quello tracciato concretamente su un foglio di carta

la figura è l’oggetto matematico del quale il disegno non è che una rappresentazione.

La figura è un elemento del mondo matematico e non un oggetto sensibile...”

(Arsac, 1989)



# ANCORA SULLE FIGURE

...Il termine *figura geometrica* rinvia a fissare una relazione tra oggetto geometrico e sue rappresentazioni possibili....

...I rapporti tra un disegno e il suo referente, così come sono costruiti dal soggetto, lettore o produttore del disegno, costituiscono per il soggetto stesso il significato della figura geometrica associata e figura...

(Capponi & Laborde, 1994)

Di qui l'importanza delle costruzioni geometriche



# LA FIGURA

Ad essa viene attribuito un significato, ma anche un nome, dunque tra *segno* e *oggetto* si stabilisce una relazione attraverso il *nome*, la definizione.

(sono presenti nella figura la relazione di *significazione* e di *rappresentazione*)



# CHE COSA FARE QUINDI A SCUOLA?

- ◉ Nella scuola primaria la geometria è quella naturale
- ◉ Il rapporto con lo spazio si evolve attraverso la crescita del bambino:
  - dal suo *microspazio* (alla sua altezza), al *mesospazio* (al più una stanza) e poi allo spazio fisico in cui è immerso (*macrospazio*)
- ◉ Rappresentazioni e linguaggio si adeguano a queste fasi evolutive



# LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO

Nella scuola media la geometria è intuitiva, ma come si è visto deve cominciare ad evolversi verso un quadro teorico più definito.

Si comincia quindi a “ragionare” su modelli, statici e dinamici; si costruiscono enunciati e definizioni da verificare e sperimentare; si comincia a generalizzare fatti, oltre che a verificarli...



# IL PASSAGGIO ALLA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Nel passaggio al biennio, scolasticamente si impone l'introduzione degli assiomi e l'avvio alla dimostrazione.

Se non mediato, questo passaggio pone seri problemi all'apprendimento:

- la motivazione
- il cambiamento di statuto epistemologico



# LE PROBLEMATICHE RELATIVE AL PASSAGGIO DALLA GEOMETRIA INTUITIVA A QUELLA RAZIONALE

- ◉ Il cambiamento di statuto epistemologico
- ◉ La mancanza di motivazione a dimostrare per proprietà “evidenti”
- ◉ Il cambiamento del “contratto didattico”
- ◉ Gli strumenti linguistici e logici di cui dispone uno studente nel biennio della scuola secondaria superiore che non sono ancora quelli “adulti”



# COME MOTIVARE?

La dimostrazione non deve essere una forzatura:

È necessario però chiarire che non si dimostra solo per “scoprire”, ma per “chiarire” o validare logicamente nella teoria risultati trovati intuitivamente.



# L'EVIDENZA

## L'evidenza

Nell'apprendimento della conoscenza matematica possono verificarsi le seguenti situazioni:

- una situazione in cui un'affermazione viene accettata intuitivamente e non si richiede alcuna dimostrazione
- una situazione in cui un'affermazione viene accettata intuitivamente, ma in Matematica essa viene anche formalmente dimostrata (coincidenza con l'affermazione intuitiva e la conclusione logicamente basata)
- una situazione in cui un'affermazione non è intuitiva, autoevidente, e può essere accettata solo sulla base di una dimostrazione formale
- una situazione in cui si entra in conflitto fra l'interpretazione (soluzione) intuitiva riguardante l'affermazione, e la risposta formalmente basata
- una situazione in cui possono apparire due intuizioni conflittuali.



Durante l'insegnamento della Matematica è importante tenere presente queste situazioni.

**Lo studente può non essere cosciente del conflitto.** L'effetto è che lo studente non accetta, non comprende l'affermazione formale, o anche quando egli sembra inizialmente capire, tende a dimenticarsene ed è l'interpretazione intuitiva quella che determina la soluzione dello studente. **Riteniamo che sia utile che gli studenti diventino coscienti del conflitto.** Limitarsi ad ignorare il conflitto (cioè la reazione intuitiva errata) lascia intatta l'intuizione originale. Il conflitto resta pertanto latente ed alla fine lo studente probabilmente dimenticherà la risposta matematicamente, formalmente corretta.

*(E. Fishbein, 1998)*



# INSEGNARE LA DIMOSTRAZIONE

- ◉ In una dimostrazione coesistono un aspetto *sintattico* (legato alla struttura formale e logica del discorso), un aspetto *semantico* (legato ai significati degli oggetti su cui si opera il ragionamento). E' necessario che lo studente comprenda le motivazioni per cui è necessario dimostrare la validità delle asserzioni fatte, e nello stesso tempo è necessario che rifletta sul perché ciò che viene dimostrato si fonda sulla correttezza di certe regole.
- ◉ *La sfida didattica oggi è quindi quella di trovare i modi attraverso cui la dimostrazione venga a svolgere una funzione di comunicazione, esplorazione, e spiegazione, oltre che di giustificazione e verifica.*



Nel momento delicato del passaggio da un approccio a una metodologia basata sull'intuizione e la verifica diretta di proprietà alla giustificazione razionale (13-14 anni), uno degli obiettivi prioritari dovrebbe forse essere quello di fornire esempi di come la dimostrazione possa essere esplicativa e convincente. Un calcolo su formule, una "dimostrazione" visiva, una discussione guidata ad osservare le regole proprie dell'argomentazione, una prova preformale o informale, o anche una dimostrazione che si conforma alle rigide norme del rigore, a seconda del livello e del contesto, possono consentire i primi approcci ad attività dimostrative e dare agli studenti l'idea che essi imparano una matematica nuova, ma che consiste di risultati che loro sanno essere veri. (*es. la disuguaglianza triangolare*)



# IL DOCUMENTO DELL'UMI (MATEMATICA 2003)

In esso si sottolinea come in una prima fase l'allievo non possa ancora rendersi conto del significato di una teoria assiomatica, gli stessi assiomi della geometria euclidea vanno "conquistati" gradualmente, non memorizzati all'inizio del biennio:

*“...in tutte le attività sarà essenziale la mediazione del linguaggio naturale, sia parlato che scritto: l'esperienza e la verbalizzazione col linguaggio naturale dovranno accompagnare sempre la formalizzazione e la riflessione sui sistemi di notazione simbolica propri della matematica...”*



## E ANCORA:

*“..l’attività matematica consiste nell’entrare dentro alla relazione  $A \rightarrow B$  e per fare ciò occorre **argomentare**, colmare le lacune, fare tentativi, esperimenti mentali e non; dopo un po’ di attività di solito si chiarisce **la teoria che fa da sfondo all’enunciato**, il significato dei termini coinvolti in esso; allora con l’uso delle conoscenze specifiche che si hanno sull’argomento, inclusa eventualmente un po’ di manipolazione simbolica, si riesce finalmente a vedere un cammino da  $A$  a  $A_1$ , da  $A_1$  a  $A_2$ , ....., e infine da  $A_n$  a  $B$ .*



# ASPETTI LOGICI DEL LINGUAGGIO

Contesti in cui educare l'allievo a formulare congetture e a ragionare sotto ipotesi:

- ⦿ i modelli dinamici
- ⦿ la piegatura della carta
- ⦿ gli ADG (Geogebra, Cabri, ecc.)
- ⦿ .....



# SINTASSI E SEMANTICA

Il problema didattico della dimostrazione consiste essenzialmente in due aspetti:

- insegnare a ***comprendere*** una dimostrazione
- insegnare a ***cogliere la struttura*** di un procedimento dimostrativo e i vari metodi di dimostrazione.

Queste capacità acquisite contribuiscono poi successivamente a far sì che l'allievo possa ***costruire*** autonomamente delle dimostrazioni.



# SINTASSI E SEMANTICA

Si tratta di fare in modo che gli allievi colgano i due aspetti:

Quello *semantico*, legato ai significati

Quello *sintattico*, legato alla struttura del  
sequenza di passi del discorso dimostrativo



# DIFFICOLTÀ DIDATTICHE LEGATE ALLA DIMOSTRAZIONE

Innanzitutto, come è ovvio attendersi, le difficoltà maggiori riguardano l'aspetto **sintattico** rispetto a quello semantico. Gli allievi hanno molte difficoltà inizialmente nel distinguere tra *ipotesi* e *tesi*, specialmente se queste non sono costituite da un'unica proprietà, ma sono più articolate, tendono a confondere le premesse con le loro conseguenze, non colgono la concatenazione logica esistente tra i vari passi dimostrativi. Esistono inoltre notevoli difficoltà a livello di linguaggio: *è da ritenersi una conquista più ambiziosa della comprensione quella della esposizione verbale del procedimento dimostrativo.*



# DIFFICOLTÀ DIDATTICHE LEGATE ALLA DIMOSTRAZIONE

Riguardo all'aspetto **semantico**, la difficoltà maggiore sta proprio nel fatto che, analogamente a quanto avviene nella conquista del formalismo algebrico, l'allievo non riesce ad astrarsi dal contesto e dai significati relativi al modello che sta usando: l'influenza dell'evidenza delle proprietà che egli legge sulla figura già di per sé legittima le sue affermazioni. Proprio per questo motivo, alcuni ricercatori francesi hanno cercato di seguire attentamente l'evoluzione del processo dimostrativo nell'allievo, a partire dall'uso che egli fa della figura geometrica che osserva: essi distinguono diversi livelli di consapevolezza, di rigore e di astrazione, già in questa fase in cui l'allievo è ancora fortemente legato all'intuizione e più che dedurre razionalmente, a partire dagli assiomi e dalle proprietà che conosce, tende ad "indurre" dal singolo caso che gli presenta, o da alcuni esempi, proprietà di validità più generale.



# L'ARGOMENTAZIONE

La dimostrazione è una particolare argomentazione.

La competenza argomentativa, costruita sin dalla scuola di base, è un elemento indispensabile per lo sviluppo della capacità di dimostrare.



# VALENZA CULTURALE ED EDUCATIVA

Le attività argomentative e dimostrative non sono utili solo per gli studenti che intraprendono studi scientifici più impegnativi; le *tappe che esse permettono di osservare nel pensiero di ogni allievo sono importanti per valutare anche il raggiungimento di livelli minimi, nello sviluppo del pensiero logico e del saper ragionare correttamente di tutti i ragazzi che completano la scuola dell'obbligo.*

**Insegnare a tutti** ad *argomentare* su quanto essi osservano a partire dalla loro esperienza concreta, a *giustificare razionalmente* le loro affermazioni, a *confutare* quelle dei compagni o dell'insegnante adducendo ragioni "valide" non solo dal proprio punto di vista, a *riconoscere causa ed effetto, premesse e loro conseguenze, a costruire un discorso coerente*, a partire da questioni semplici e il più possibile da loro padroneggiate nella comprensione, concatenando varie ipotesi e "deduzioni", appare come un dovere da parte dei docenti di Matematica soprattutto, ma anche di tutto il Consiglio di classe.



# ATTIVITÀ PREPARATORIE NELLA SCUOLA MEDIA

- Fornire giustificazioni di proprietà in forma breve, schematica, ed espresse simbolicamente – richiederne l'interpretazione e l'esplicitazione verbale
- Fornire argomentazioni in cui manchi il riferimento alla proprietà che “giustifica” l'affermazione ( es. “è vero che.....perché.....”) e riconoscere il riconoscimento del nesso “causale”
- Assegnare verbalmente costruzioni geometriche e richiederne la realizzazione nel disegno
- Formulare proprietà in forma di implicazione (“se.....allora.....”) (*attività sintattica*)
- Verificare se vale una certa implicazione e/o la sua inversa (*attività semantica*)
- Distinzione tra proprietà **vere** - vere solo in alcuni casi e quindi **false**
- Utilizzare la figura, analizzarla, trasformarla, rianalizzarla, al fine di ricercare proprietà e/o verificarle
- Analizzare o completare o riordinare sequenze deduttive, o parti più brevi e limitate di queste



# ATTIVITÀ PREPARATORIE ALLA DIMOSTRAZIONE

- **Capacità di argomentare** esplicitando in forma chiara e corretta semplici “ragionamenti”;
  - capacità di analizzare la possibilità di generalizzare proprietà, eventualmente negarne la possibilità attraverso l’uso del controesempio;
  - capacità di osservare ed analizzare una figura con un atteggiamento euristico, alla ricerca di proprietà da evidenziare e verificare;
  - **comprensione di semplici e brevi catene deduttive**
  - comprensione ed uso del simbolismo in ambito geometrico (traduzione del testo verbale di un problema o di una costruzione geometrica più o meno articolata in termini simbolici e grafici);
  - conoscenza e uso corretto dei principali connettivi logici, in particolare della negazione e del se.....allora;
  - capacità di trasformare il testo di un enunciato in forma di implicazione e, viceversa, riformulare un enunciato a partire dalla sua forma in termini di implicazione;
  - capacità di formulare, a partire da una proposizione, la sua inversa e la sua contronominale;
  - conoscenza delle principali definizioni e proprietà relative alle figure piane;
- capacità di riconoscere, in un discorso strutturato semplicemente, le premesse dalle conseguenze ed il rapporto causa-effetto



## Esempi di attività

*Trasforma ciascuna delle seguenti proposizioni nella forma di implicazione utilizzando se...allora*

P1: Un triangolo equilatero è isoscele

P2: Rette parallele tagliate da una trasversale formano angoli corrispondenti uguali

P3: La congiungente i punti medi dei due lati di un triangolo è parallela al terzo lato e lo divide a metà

P4: In un triangolo equilatero ogni altezza è anche bisettrice e mediana

Siano  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tre rette distinte del piano. Se la retta  $a$  è parallela a  $b$ , la retta  $b$  è parallela ad una terza retta  $c$ , si può affermare che  $a$  è parallela a  $c$ .

*Rappresenta questa proprietà con il disegno e con i simboli.*



# LAVORO DI GRUPPO

Trovare alcune attività geometriche che esemplifichino i punti:

- **capacità di argomentare** esplicitando in forma chiara e corretta semplici “ragionamenti”;
- **capacità di analizzare la possibilità di generalizzare proprietà**, eventualmente negarne la possibilità attraverso l’uso del controesempio;
- **capacità di osservare ed analizzare una figura con un atteggiamento euristico**, alla ricerca di proprietà da evidenziare e verificare.